**Лекция 12 Предел последовательности**

* 1. **Понятие последовательности**

М12.1.1 Определение: функция  из множества натуральных чисел в множество действительных чисел называется *последовательностью*. Значения функции  называются *элементами* последовательности.

*Замечание:* символом  обозначается значение функции  при , символом  - значение этой функции при  и т. д.

М12.1.2.Примеры. 1) : 

2) : 

3) ; 

4)  - геометрическая прогрессия со знаменателем 

и первым элементом .

5)  - арифметическая прогрессия с разностью

 и первым элементом .

6) ; ; ;  -

последовательность десятичных приближений числа .

7) 

 называется «n факториал» и обозначается 

**М12.1.3** Последовательность можно задать также посредством *рекуррентного соотношения*, когда общий элемент последовательности  выражается через  предшествующих элементов и при этом известны  первых элементов последовательности.

**М12.1.4 Примеры.** 1) ;

2)  (*числа Фибоначчи*);

3)  (*числа Каталана*).

**М12.1.5 Определение.** *Произведением последовательности  на число*  называется последовательность, элементами которой являются числа .

**М12.1.6 Определение.** *Суммой последовательностей*  и  называется последовательность, элементами которой являются числа .

Аналогично определяются разность, произведение и частное последовательностей.

**12.2 Определение предела**

**М12.2.1 Определение.** Число  называется *пределом последовательности* , если для любого, как угодно малого положительного числа  найдется номер  такой, что для любого числа  выполняется неравенство . Записывается это так: .

**М12.2.2** *Замечание 1.* Геометрически определение предела можно истолковать так: отметим на числовой прямой число . Тогда, как бы ни мало было число , вне интервала  окажется лишь конечное количество элементов последовательности. Иными словами, элементы последовательности как бы концентрируются возле числа , причем, чем ближе к , тем выше концентрация.

**М12.2.3***. Замечание 2.* Далеко не каждая последовательность имеет предел. Простейшим примером последовательности, не имеющей предела, является последовательность .

**М12.2.4 Пример 1.** Покажем, что последовательность  имеет предел, равный нулю.

Выберем произвольное положительное число  и попытаемся найти номер  (естественно, зависящий от числа ) такой, что для всех  выполнится неравенство . Поскольку , то  и неравенство  равносильно более простому:  . Отсюда получаем . Достаточно взять , где  - целая часть числа .

*Замечание.* Конечно же, в качестве числа  можно брать и любое число, большее, чем .

**М12.2.5 Пример 2 (Постоянная последовательность)** Рассмотрим последовательность , все элементы которой одинаковы и покажем, что ее предел равен числу .

Выберем произвольное положительное число  и попытаемся найти номер  (вообще говоря, зависящий от числа ) такой, что для всех  выполнится неравенство . Поскольку , то неравенство  верно всегда, то есть независимо от номера . Это значит, что в качестве  можно взять любое натуральное число, например, .

**М12.2.6 Определение.** Предел последовательности  равен бесконечности (плюс бесконечности), если для любого, как угодно большого положительного числа  найдется номер  такой, что для любого числа  выполняется неравенство .

Записывается это так: .

**М12.2.7 Определение.** Предел последовательности  равен минус бесконечности, если для любого, как угодно большого по модулю отрицательного числа  найдется номер  такой, что для любого числа  выполняется неравенство .

Записывается это так: .

**М12.2.8 Пример 3.** Покажем, что .

Выберем произвольное положительное число . и попытаемся найти номер  (вообще говоря, зависящий от числа ) такой, что для всех  выполнится неравенство . Поскольку обе части неравенства  не отрицательны, его можно возвести в квадрат: . Значит, в качестве номера  можно взять число .

Приведем некоторые несложные, но важные свойства предела последовательности.

**М12.2.9** Отбросив первые  элементов последовательности , получим, вообще говоря, другую последовательность  Очевидно, что если , то и . Аналогично, если  (), то и (). Кроме того, если последовательность  не имела предела, то и последовательность  также не будет иметь предела.

**М12.2.10** (**Единственность предела**) Последовательность не может иметь двух или более различных пределов. Пусть  и . Рассмотрим непересекающиеся окрестности  и точек  и . В качестве значения  можно взять любое число, не превосходящее . Для заданного числа  по определению предела найдутся номера  и  такие, что для  и . Тогда при  получим, что  и , иными словами, . Противоречие.

**М12.2.11** Последовательность, имеющая конечный предел, ограничена. Пусть . Положим в определении предела  (можно было взять и любое другое положительное число). Тогда, найдется номер  такой что при  будет иметь место равенство . Это равенство можно переписать в виде . Если взять , то для любого номера  получим .

**12.3 Теоремы о пределах**

**М12.3.1 Теорема (Предел и арифметические операции)** Если , , то:

1) ; 2) ; 3)  (при условии ).

*Доказательство.* 1) Обозначим , . Выберем некоторое число . Надо показать, что для него найдется номер , начиная с которого (при ) выполнится неравенство .

Поскольку , то для любого положительного числа, значит и для числа  найдется номер  такой, что для всех номеров  выполнится неравенство .

Аналогично, поскольку , то для числа  найдется номер  такой, что для всех номеров  выполнится неравенство .

Обозначим , тогда при  будет выполнено и  и .

Тогда , что и требовалось.

2) Обозначим , . Выберем некоторое число . Надо показать, что для него найдется номер , начиная с которого (при ) выполнится неравенство .

Поскольку , то для любого положительного числа, значит и для числа  найдется номер  такой, что для всех номеров  выполнится неравенство .

Аналогично, поскольку , то для числа  найдется номер  такой, что для всех номеров  выполнится неравенство .

Обозначим , тогда при  будет выполнено и  и .

Тогда 

.

3) Без доказательства.

**М12.3.2 Следствие 1.** Если , то  для любого числа .

*Доказательство.* .

**М12.3.3 Следствие 2.** Если , , то: ;

*Доказательство.* 

**М12.3.4 Теорема (предел и неравенства)** 1) Если ,  и , то  ; 2) Если   и , то ; 3) Если  или  и при этом , , то .

*Доказательство.* 1) Выберем какое-либо число  такое, что . Тогда, по определению предела, для числа  найдется номер  такой, что для  выполняется неравенство . Аналогично, для числа  найдется номер  такой, что для  выполняется неравенство . Тогда для  выполнятся оба неравенства  и .

Из неравенства  следует , то есть . Аналогично, из неравенства  следует , то есть . значит, , что и требовалось

2) По выбранному числу  найдется номер  такой, что для  выполняется неравенство , откуда следует . Для того же значения  найдется номер  такой, что для  выполняется неравенство , откуда следует . Тогда при  выполнятся оба неравенства  и . Получаем:

, то есть , что и требовалось.

3) Сразу следует из части 1) данной теоремы.

*Замечание.* В части 3) теоремы утверждается, что если даже элементы одной последовательности строго меньше элементов другой последовательности, пределы этих последовательностей могут совпасть. Примером таких последовательностей являются , . Действительно, при  верно неравенство , но .

**М12.3.5 Определение.** Последовательность  называется *фундаментальной последовательностью*, если для любого числа  найдется номер  такой, что для любых  и  выполняется неравенство .

**М12.3.6 Теорема (Критерий Коши для последовательностей)** Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

*Доказательство.* 1) Пусть . Покажем, что последовательность  фундаментальна. Пусть выбрано число , тогда найдется номер  такой, что для  .

Пусть  и , тогда , что и требовалось. 2) Без доказательства.

**12.4. Монотонные последовательности**

**М12.4.1 Определение.** Последовательность называется:

- *возрастающей*, если ;

- *неубывающей*, если ,

- *невозрастающей*, если 

- *убывающей*, если ;

последовательности перечисленных четырех типов называются *монотонными* последовательностями.

**М12.4.2 Определение.** Последовательность  называется:

- *ограниченной сверху*, если существует число  такое, что ;

- *ограниченной снизу*, если существует число  такое, что ;

- *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу.

**М12.4.3 Теорема Вейерштрасса (Предел монотонной ограниченной последовательности)**

1) Ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет предел

2) Ограниченная снизу невозрастающая последовательность имеет предел.

*Доказательство:* 1) Поскольку множество значений последовательности ограничено сверху, оно имеет точную верхнюю грань . По определению точной верхней грани для любого числа  найдется элемент  такой, что . Поскольку последовательность не убывает, то для  , то есть . Таким образом, точная верхняя грань и есть предел последовательности.

2) доказывается аналогично (рассмотрением точной нижней грани).

12.5 Число е (основание натуральных логарифмов)

М12.5.1 Теорема (неравенство Бернулли)

Для любого действительного числа  и любого натурального числа  имеет место неравенство 

*Доказательство:* По формуле бинома Ньютона



*Теорема доказана*.

М12.5.2 Покажем, что последовательность имеет предел. Для этого рассмотрим сначала последовательность и покажем, что она является монотонной и ограниченной. Очевидно, что  при любом значении , т.к. в скобках находится выражение, большее, чем 1, и оно возводится в положительную степень. Значит, последовательность  ограничена снизу числом 1. Поскольку все элементы последовательности положительны, то для доказательства факта убывания последовательности достаточно показать, что  (каждый последующий элемент меньше предыдущего).



При первом переходе к неравенству воспользовались неравенством Бернулли:



При втором переходе неравенству воспользовались тем, что поскольку , то  (увеличивая знаменатель, уменьшаем дробь).

Итак, последовательность  убывает и ограничена снизу. По теореме о пределе ограниченной монотонной последовательности, существует . Обозначим этот предел буквой .

Очевидно, что . Значит, . Предел принято называть вторым «замечательным» пределом. Число  называется *основанием натуральных логарифмов.*

М12.5.3 Покажем еще, что :



В предпоследнем равенстве воспользовались очевидным фактом: если , то и .

**12.6 Операции с символом** **. Неопределенности**

**М12.6.1** Пусть  и . Очевидно, что . Кратко это можно записать так: . Аналогично, если  и , тогда , т.е. .

Можно показать также, что , , , . Из последнего равенства следует, что .

**М12.6.2.** Невозможно однозначно сказать, чему равны выражения , ,  и .

Рассмотрим последовательности  и  при . Очевидно, что  и . Но  при различных значениях чисел  и  может принимать различные числовые значения. Поэтому выражение  однозначно не определено и называется *неопределенностью*.

Рассмотрим последовательности  и  при . Снова очевидно, что  и . Но  при различных значениях чисел  и  может принимать различные числовые значения. Значит, выражение  также является неопределенностью.

Рассматривая последовательности  и  убеждаемся, что  - тоже неопределенность, а рассматривая последовательности  и  убеждаемся в том, что неопределенностью является и выражение .

Выражения ,  и  также являются неопределенностями, в чем можно убедиться формальным логарифмированием этих выражений. Например, .

Выражения , , , , ,  и  будем называть основными неопределенностями.

**12.7 Примеры раскрытия неопределенностей при вычислении пределов**

**Пример 1.** Вычислить пределы последовательностей: а) ; б) ; в) ; г) ; д) 

*Решение.* а) при  пределы и числителя и знаменателя равны , значит, имеем дело с неопределенностью вида . для раскрытия неопределенности поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень  (в нашем случае – на ) и воспользуемся теоремой о пределе и арифметических операциях:



б) применим аналогичный прием: поделим числитель и знаменатель на :

;

в) аналогично: поделим числитель и знаменатель на :

. при делении ненулевого числа на 0 получится либо , либо  (см. М3.1.1). Для определения знака бесконечности в ответе установим к какого рода бесконечностям стремятся числитель и знаменатель. Коэффициент при старшей степени числителя отрицателен, значит, . По той же причине . Таким образом, найдется номер , начиная с которого и числитель и знаменатель будут отрицательны, а значение дроби – положительно. Следовательно .

На основе примеров а)-в) можно сделать вывод: предел отношения многочленов при  равен:

- нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя;

- плюс или минус бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя;

- отношению коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя, если эти старшие степени равны.

г) применим только что выведенное правило. Степень числителя равна , а степень знаменателя равна . Значит, ;

д) поделим числитель и знаменатель на степень с большим по модулю основанием (в нашем случае – на : .

**Пример 2.** Вычислить пределы: а) ; б) ;

*Решение.* а) поделим числитель и знаменатель на :

;

б) 

**Пример 3.** Вычислить пределы а) ; б) ; в) ;

*Решение.* а) Поскольку , то  (см. М3.1.1.).

б) Аналогично: ; (см. М3.1.1)

в) Попытка поступить аналогично а) и б), приводит к неопределенности  (см. М3.1.2). Такая же неопределенность  имела место и во втором «замечательном» пределе . Преобразуем: . Сделаем замену переменной , тогда  и если , то и . Поскольку , то получим предел .

.

**Пример 4.** Вычислить пределы: а) ; б)  ; в) ; г)  ; д) ;

*Решение.* а) Обозначим , тогда . Поскольку  при любом , то последовательность  убывает, а поскольку , то эта последовательность ограничена снизу. По теореме М2.4.3. эта последовательность имеет предел, который для краткости записи обозначим . Из равенства / получаем ; ; . Значит, либо , либо , либо . Но, поскольку, , равенство  невозможно. Поскольку последовательность  убывает, то равенство  тоже невозможно. Значит, ;

**М12.7.1** б) Если , то . Остается рассмотреть случай . Обозначим , тогда . Поскольку , то найдется номер  такой, что для всех  верно равенство . Из равенства  и неравенства  получаем, что начиная с номера  последовательность  - убывающая. А поскольку , то есть последовательность ограничена снизу, то она имеет предел, который для краткости обозначим . Из равенства  при  получим , откуда рассуждениями аналогичными п. а) получим .

**М12.7.2.** в) При заданном найдется номер  такой, что для всех  верно неравенство , откуда , откуда следует ;

**М12.7.3.** г) Аналогично, по заданному найдется номер  такой, что для всех  верно неравенство , откуда , откуда следует ;

**М12.7.4.** д) Покажем, что . При  это очевидно. Пусть . Обозначим , тогда  Очевидно, что найдется такой номер , начиная с которого будет выполняться неравенство . Значит, начиная с этого номера, последовательность  убывает. А поскольку она ограничена снизу нулем, то у нее существует предел (обозначим его ). Тогда из равенства  получаем . Что и требовалось. Пусть теперь . Рассмотрим выражение . Поскольку , то по доказанному . Но тогда и , откуда .

**12.8 Примеры вычисления пределов рекуррентно заданных последовательностей**

Основная идея этой части лекции уже применялась в М3.3.1 и М3.3.4, поэтому ограничимся двумя примерами.

**Пример 1.** Вычислить предел рекуррентно заданной последовательности  при .

*Решение.* Согласно М1.2.5 имеем уравнение , корнями которого являются  и . Значит, последовательности вида  при любых значениях  и удовлетворяют формуле . Из условий  получаем ; , откуда , .

Значит, , .

**Пример 2.** Вычислить предел последовательности 

*Решение.* Очевидно, что . Последовательность возрастает и ограничена сверху числом  Значит, она имеет предел, который для краткости обозначим . Поскольку , то равенство  можно возводить в квадрат: , откуда . Решив квадратное уравнение , получим корни  и . У положительной последовательности не может быть отрицательного предела (следует из М2.3.4), значит, .

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется последовательностью? Что называется суммой последовательностей? Что называется произведением последовательности на число?
2. Что означает, что предел последовательности равен числу ? Что означает, что предел последовательности равен плюс бесконечности? Что означает, что предел последовательности равен минус бесконечности?
3. Что называется подпоследовательностью? Что называется частичным пределом последовательности? Что называется верхним и нижним пределами последовательности?
4. Сформулируйте теорему о пределе и арифметических операциях. Сформулируйте теорему о пределе и неравенствах.
5. Какая последовательность назвается фундаментальной? Сформулируйте критерий Коши для последовательностей.
6. Какая последовательность называется убывающей( невозрастающей, неубывающей, возрастающей, монотонной)? Какая последовательность назвается ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)? Сформулируйте теорему Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
7. Запишите неравенство Бернулли. Что называется основанием натуральных логарифмов?
8. Запишите результаты основных операций с символом бесконечности. Что называется неопределенностью? Запишите семь простейших неопределенностей.
9. Что означает, что последовательность стремится к пределу сверху? Что означает, что последовательность стремится к пределу снизу?
10. Чему равны пределы а) ; б)  ; в) ; г)  ; д) ?